

1. Три медных шара с радиусами 3, 6 и 9 см переплавили в куб. Найдите площадь поверхности полученного куба.

2. Три свинцовых куба с ребрами 1, 2 и 3 см переплавили в шар. Вычислите площадь поверхности полученного шара.

3. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 3 и 4 см, а угол между ними — равен 60° . Площадь боковой поверхности этого параллелепипеда равна $15\sqrt{3}$ см². Найдите объем параллелепипеда.

4. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 4 и 5 см, а угол между ними — равен 45° . Площадь боковой поверхности этого параллелепипеда равна $20\sqrt{2}$ см². Найдите объем параллелепипеда.

5. Равнобедренные треугольники ABC и BDC , каждый из которых имеет основание BC , не лежат в одной плоскости. Их высоты, проведенные к основанию, равны 5 и 8 см, а расстояние между точками A и D равно 7 см. Найдите градусную меру угла между плоскостями ABC и BDC .

6. Равнобедренные треугольники ABC и BDC , каждый из которых имеет основание BC , не лежат в одной плоскости. Их высоты, проведенные к основанию, равны 3 и 8 см, а расстояние между точками A и D равно 7 см. Найдите градусную меру угла между плоскостями ABC и BDC .

7. Все боковые ребра треугольной пирамиды равны, а основанием является прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8 см. Найдите объем пирамиды, если длина бокового ребра пирамиды равна $\sqrt{29}$ см.

8. Все боковые ребра треугольной пирамиды составляют с основанием равные углы, а основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с катетами 8 и 6 см. Найдите объем пирамиды, если длина бокового ребра пирамиды равна $\sqrt{34}$ см.

9. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если диагональ его осевого сечения, равная 8 см, составляет с образующей цилиндра угол 30° .

10. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если диагональ его осевого сечения составляет с образующей цилиндра угол 30° , а диаметр основания цилиндра равен 6 см.

11. Основание прямой призмы — равнобедренная трапеция с основаниями 9 и 3 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если диагональ большей боковой грани составляет с боковым ребром призмы угол 45° и известно, что в основание призмы можно вписать окружность.

12. Укажите, какое геометрическое тело получится при вращении прямоугольного треугольника около одного из катетов:

- а) цилиндр
- б) конус
- в) сфера
- г) пирамида

13. Конус вписан в сферу, радиус которой равен 16 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости основания конуса, если угол при вершине его осевого сечения равен 30° .

14. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна $\sqrt{57}$ см, а стороны его основания — 4 и 5 см. Найдите боковое ребро параллелепипеда и тангенс угла наклона диагонали параллелепипеда к плоскости основания.

15. Диагональ основания правильной четырехугольной пирамиды равна $4\sqrt{2}$. Найдите объем данной пирамиды, если ее апофема равна $2\sqrt{5}$.

16. Апофема правильной четырехугольной пирамиды равна $3\sqrt{5}$. Найдите объем данной пирамиды, если радиус окружности, описанной около ее основания, равен $3\sqrt{2}$.

17. Основание пирамиды — ромб с углом 30° . Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60° . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если радиус вписанной в ромб окружности равен $\sqrt{3}$ см.

18. Основание пирамиды — ромб с углом 45° . Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60° . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если радиус вписанной в ромб окружности равен $2\sqrt{2}$ см.

19. Основание пирамиды — квадрат со стороной 4 см. Высота пирамиды равна 3 см и проходит через одну из вершин основания. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

20. Основание пирамиды — равносторонний треугольник со стороной 2 см. Высота пирамиды равна 4 см и проходит через одну из вершин основания. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

21. Равносторонний треугольник со стороной $\sqrt[3]{\frac{7}{\pi}}$ см вращается вокруг одной из сторон. Найдите объем получившейся фигуры вращения.

22. Равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой $\frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$ см вращается вокруг гипотенузы. Найдите объем получившейся фигуры вращения.

23. Основание и высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, равны по 4 см. Данная точка находится на расстоянии 6 см от плоскости треугольника и на равных расстояниях от его вершин. Найдите это расстояние.

24. Найдите расстояние от точки M до плоскости равнобедренного треугольника ABC , зная, что $AB = BC = 13$ см, $AC = 10$ см, а точка M удалена от каждой стороны треугольника на $8\frac{2}{3}$ см.

25. Центральный угол в развертке боковой поверхности конуса равен 120° . Высота конуса равна $4\sqrt{2}$ см. Найдите его объем.

26. Центральный угол в развертке боковой поверхности конуса равен 240° . Высота конуса равна $2\sqrt{5}$ см. Найдите его объем.

27. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите двугранный угол $B_1 A D B$, если известно, что четырехугольник $ABCD$ — квадрат, $AC = 6\sqrt{2}$ см, $AB_1 = 4\sqrt{3}$ см.

28. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите двугранный угол $ADCA_1$, если, $AC = 13$ см, $DC = 5$ см, $AA_1 = 12\sqrt{3}$ см.

29. Из вершины A правильного треугольника ABC проведен к его плоскости перпендикуляр AM . Точка M соединена с точками B и C . Двугранный угол, образованный плоскостями ABC и MBC , равен 60° . Найдите тангенс угла, образованного прямой MB с плоскостью треугольника ABC .

30. Из вершины A правильного треугольника ABC проведен к его плоскости перпендикуляр AM . Точка M соединена с точками B и C . Тангенс угла, образованного стороной MB с плоскостью треугольника ABC , равен 0,5. Найдите двугранный угол, образованный плоскостями ABC и MBC .

31. Цилиндр пересечен плоскостью, параллельной оси, так, что в сечении получился квадрат с диагональю, равной $4\sqrt{2}$ см. Сечение отсекает от окружности основания дугу в 60° . Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

32. Цилиндр пересечен плоскостью, параллельной оси. Диагональ сечения вдвое больше радиуса основания цилиндра, равного 6 см. Сечение отсекает от окружности основания дугу в 90° . Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

33. Найдите объем прямого параллелепипеда, основанием которого является ромб, зная, что высота параллелепипеда равна $\sqrt{3}$ см, а его диагонали составляют с плоскостью основания углы 45° и 30° .

34. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб со стороной 6 см, угол между плоскостями двух боковых граней равен 60° . Большая диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол 45° . Найдите объем параллелепипеда.

35. Через вершину конуса проведена плоскость, пересекающая основание по хорде, стягивающей дугу в 90° . Найдите площадь боковой поверхности конуса, если его образующая равна 4 см, а угол в сечении при вершине конуса равен 60° .

36. В конусе через его вершину проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу в 120° . Радиус основания конуса равен 6 см, а угол в сечении при вершине конуса равен 90° . Найдите площадь боковой поверхности конуса.

37. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, если ее боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 45° , а площадь диагонального сечения равна 36 см^2 .

38. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, если ее диагональным сечением является равносторонний треугольник, площадь которого равна $16\sqrt{3} \text{ см}^2$.

39. Апофема правильной четырехугольной пирамиды равна 5 см. Тангенс двугранного угла при ребре основания пирамиды равен $\frac{4}{3}$. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

40. Высота правильной треугольной пирамиды равна 5 см. Косинус двугранного угла при ребре основания пирамиды равен $\frac{12}{13}$. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

41. Радиус основания цилиндра равен 2 см, а высота — 4 см. Поместится ли в этот цилиндр шар, объем которого в два раза меньше объема цилиндра?

42. Радиус основания цилиндра равен 3 см, а высота — 2 см. Поместится ли в этот цилиндр шар, объем которого в три раза меньше объема цилиндра?

43. Шар, радиус которого равен 37 см, касается всех сторон равнобедренной трапеции. Основания трапеции равны 18 и 32 см. Найдите расстояние от центра шара до плоскости трапеции.

44. Шар касается всех сторон ромба. Центр шара удален от вершин ромба на 9 и 11 см, а от плоскости ромба на 7 см. Найдите радиус шара.

45. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны 12 и 6 см, высота — 4 см. Через сторону большего основания и противоположную ей вершину меньшего основания проведена плоскость. Найдите площадь полученного сечения.

46. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны 6 и 3 см, высота — 2,5 см. Через сторону меньшего основания и противоположную ей вершину большего основания проведена плоскость. Найдите площадь полученного сечения.

47. Угол между диагоналями основания прямоугольного параллелепипеда равен 30° . Диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол 60° . Найдите высоту параллелепипеда, если его объем равен $2\sqrt{3}$.

48. Угол между диагоналями основания прямоугольного параллелепипеда равен 45° . Диагональ параллелепипеда составляет с боковым ребром угол 60° . Найдите высоту параллелепипеда, если его объем равен $\frac{9\sqrt{6}}{4}$.

49. Найдите полную поверхность конуса, если периметр осевого сечения равен 64 см, а угол развертки боковой поверхности — 120° .

50. Найдите полную поверхность конуса, если площадь осевого сечения равна 12 см^2 , а угол развертки боковой поверхности — 216° .

51. Длина ребра куба равна 4 см. Найдите площадь сечения, проведенного через диагональ AD_1 грани AA_1D_1D и середину M ребра BB_1 .

52. Длина ребра куба равна 8 см. Найдите площадь сечения, проведенного через диагональ DC_1 грани CC_1D_1D и середину N ребра AB .

53. Из одной точки проведены к плоскости две наклонные, длины которых 8 и 3 см. Разность углов, образованных наклонными с плоскостью, равна 60° . Найдите проекции наклонных на эту плоскость.

54. Из одной точки проведены к плоскости две наклонные, проекции которых на эту плоскость равны 9 и 1 см. Одна из наклонных образует с плоскостью угол, в два раза больший, чем другая. Найдите длины наклонных.

55. Все боковые грани треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ — квадраты. Расстояние от середины ребра AB до вершины C равно 3. Найдите расстояние от середины ребра BC до вершины A_1 .

56. Все боковые грани треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ — квадраты. Расстояние от середины ребра BC до вершины A_1 равно 7. Найдите сторону основания призмы.

57. Сфера радиусом $\sqrt{3}$ вписана в правильную треугольную призму. Найдите площадь полной поверхности призмы.

58. Сфера радиусом $2\sqrt{3}$ описана вокруг правильной треугольной призмы. Ребро основания призмы равно $2\sqrt{3}$. Найдите высоту призмы.

59. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 60° . Найдите центральный угол в развертке боковой поверхности этого конуса.

60. Центральный угол в развертке боковой поверхности конуса равен 180° . Найдите угол при вершине осевого сечения этого конуса.

61. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точка K — центр грани $DD_1 C_1 C$. Найдите угол между прямыми BK и $B_1 D_1$.

62. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точки M , N и K — середины ребер $A_1 B_1$, AA_1 и AD соответственно. Найдите угол между прямыми MN и KN .

63. Основание прямого параллелепипеда — ромб, площади диагональных сечений параллелепипеда равны 4 и 3. Найдите полную поверхность параллелепипеда, если диагонали меньшего диагонального сечения параллелепипеда взаимно перпендикулярны.

64. Основание прямого параллелепипеда — ромб, площади диагональных сечений параллелепипеда равны 6 и 8, а меньшая диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол 45° . Найдите полную поверхность параллелепипеда.

65. Найдите площадь полной поверхности усеченного конуса, если площади его оснований — 25π и 64π см², а площадь осевого сечения — 52 см².

66. Найдите радиусы оснований усеченного конуса, если его боковая поверхность равна 182π см², образующая — 13 см, а высота — 5 см.

67. Треугольник ABC прямоугольный ($\angle C = 90^\circ$), $AB = 12$ см. Точка M удалена на расстояние, равное 10 см, от каждой вершины треугольника. Найдите угол между прямой MC и плоскостью ABC .

68. Треугольник ABC прямоугольный ($\angle C = 90^\circ$), $AB = 10$ см. Точка K удалена на расстояние, равное 20 см, от каждой вершины треугольника. Найдите угол между прямой KC и плоскостью ABC .

69. В основании прямой призмы лежит равнобедренный треугольник со сторонами 10 , 10 и 12 см. Сечение, проходящее через его основание и среднюю линию другого основания, наклонено к основанию призмы под углом 45° . Найдите площадь сечения.

70. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами $AC=6$ см и $CB=10$ см. Сечение, проходящее через катет AC и среднюю линию другого основания, наклонено к основанию призмы под углом 60° . Найдите площадь сечения.

71. Решите неравенство $2^{x-1} \geq 15$ и найдите его наименьшее целое решение.

72. Решите неравенство $3^{x-1} \leq 29$ и найдите его наибольшее целое решение.

73. Для функции $f(x) = 2^{\frac{4x-3}{x}}$ найдите все значения аргумента, при которых $f(x) \geq 2$.

74. Для функции $f(x) = 3^{\frac{3x-2}{x}}$ найдите все значения аргумента, при которых $f(x) \geq 3$.

75. Сколькими способами могут расположиться в турнирной таблице четыре команды по мини-футболу, если известно, что никакие две команды не набрали очков поровну?

76. Сколькими способами могут расположиться в турнирной таблице пять баскетбольных команд, если известно, что никакие две команды не набрали очков поровну?

77. Найдите все значения переменной, при которых значение дроби $\frac{\log_4(x^2 - 3x + 3)}{x - 2}$ равно нулю.

78. Найдите все значения переменной, при которых значение дроби $\frac{\log_3(x^2 - 5x + 5)}{x - 4}$ равно нулю.

79. Найдите наименьшее целое число из промежутка убывания функции $f(x) = x^3 + 8x^2 - 4$.

80. Найдите наименьшее целое число из промежутка убывания функции $f(x) = x^3 + 7x^2 - 5$.

81. Решите уравнение $3 \cdot 16^{\frac{2-x}{15}} - 7 \cdot 16^{\frac{2-x}{30}} = 20$.

82. Решите уравнение $2 \cdot 25^{\frac{3-x}{7}} - 7 \cdot 25^{\frac{3-x}{14}} = 15$.

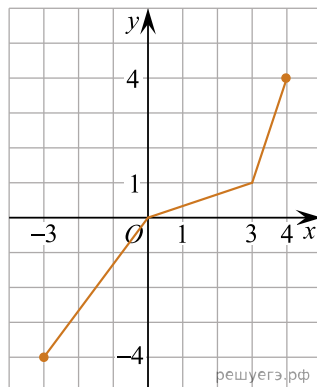
83. Решите неравенство $\sqrt{6x - 8 - x^2} > -2$.

84. Решите неравенство $\sqrt{12 - x - x^2} \geq -3$.

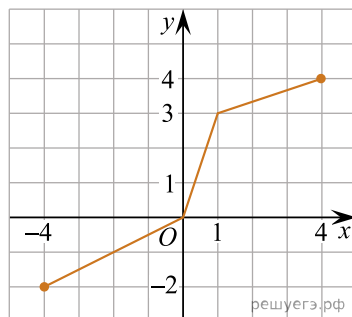
85. Катеты прямоугольного треугольника равны 7 см и 24 см. Найдите расстояние от вершины прямого угла до плоскости, проходящей через гипотенузу и составляющей угол 30° с плоскостью треугольника.

86. В прямоугольном треугольнике катет равен 12 см, гипотенуза — 15 см. Найдите расстояние от вершины прямого угла до плоскости, проходящей через гипотенузу и составляющей угол 60° с плоскостью треугольника.

87. Функция $y = f(x)$ задана графиком. Постройте график обратной к ней функции.



88. Функция $y = f(x)$ задана графиком. Постройте график обратной к ней функции.



89. Найдите область определения функции $f(x) = (x-2)^{\frac{2}{7}} + (x^2 - 3x + 2)^{-\frac{9}{5}}$.

90. Найдите область определения функции $f(x) = (x-3)^{-\frac{2}{7}} + (x^2 - 4x + 3)^{\frac{10}{7}}$.

91. Исследуйте на четность (нечетность) функцию $f(x) = \frac{3^x - 1}{3^x + 1}$.

92. Исследуйте на четность (нечетность) функцию $f(x) = \frac{7^x - 1}{7^x + 1}$.

93. Решите уравнение $\cos 14x + 2 \sin 5x \sin 9x = 0$.

94. Решите уравнение $2 \cos 3x \cos 7x - \cos 10x = 0$.

95. Точка, не принадлежащая плоскости квадрата, равноудалена от его вершин. Расстояние от этой точки до плоскости квадрата равно 3 см. Найдите расстояние от этой точки до каждой вершины квадрата, если его сторона — 4 см.

96. Расстояние от некоторой точки до плоскости квадрата равно 2 см, а до каждой его вершины — 6 см. Найдите сторону квадрата.

97. Вычислите $f'(0)$, если $f(x) = 2^x \cdot e^x$.

98. Вычислите $f'(0)$, если $f(x) = 5^x \cdot e^x$.

99. Найдите значение выражения $5^{\frac{2}{\log_4 3}} \cdot (0,6)^{\frac{2}{\log_4 3}} + 6^{\frac{\lg 17}{\lg 6}}$.

100. Найдите значение выражения $2^{\frac{4}{\log_2 3}} \cdot (1,5)^{\frac{1}{\log_2 3}} + 14^{\frac{\lg 15}{\lg 14}}$.

101. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды, если сторона основания равна 2 см, а двугранный угол при ребре основания — 60° .

102. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды, если сторона основания равна 2 см, а двугранный угол при ребре основания — 30° .

103. Решите уравнение $x = 5 - \sqrt{2x^2 - 14x + 13}$.

104. Решите уравнение $x = \sqrt{1 + 8x + 2x^2} - 3$.

105. Решите неравенство $\sqrt{3x^2 + 7x - 6} \leq 0$.

106. Решите неравенство $\sqrt{4x^2 + 5x - 6} \leq 0$.

107. Найдите значение выражения $\sqrt{10} \cdot \sqrt[3]{-10} \cdot \sqrt[6]{10} - \sqrt[7]{(-5)^7} + (-3\sqrt[4]{2})^4$.

108. Найдите значение выражения $\sqrt{13} \cdot \sqrt[3]{-13} \cdot \sqrt[6]{13} - \sqrt[9]{(-2)^9} + (-2\sqrt[6]{3})^6$.

109. Найдите значение выражения $(5^{(\sqrt{3}-2)^2} : 5^{(\sqrt{3}+2)^2})^{-0,125\sqrt{3}}$.

110. Найдите значение выражения $(2^{(\sqrt{5}-2)^2} : 2^{(\sqrt{5}+2)^2})^{-0,125\sqrt{5}}$.

111. Радиус основания конуса равен $6\sqrt[3]{2}$ см. Найдите радиус сечения, параллельного основанию, делящего объем конуса пополам.

112. Найдите радиус основания конуса, если радиус сечения, параллельного основанию, делящего объем конуса пополам, равен $3\sqrt[3]{4}$ см.

113. Найдите угол между прямыми AB и CD , если $A(3; -2; 4)$, $B(4; -1; 2)$, $C(6; -3; 2)$ и $D(7; -3; 1)$.

114. Найдите угол между прямыми AB и CD , если $A(\sqrt{3}; 1; 0)$, $B(0; 0; 2\sqrt{2})$, $C(0; 2; 0)$ и $D(\sqrt{3}; 1; 2\sqrt{2})$.

115. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций $f(x) = 2^{2+x} - 2 \cdot 0,5^{2-x}$ и $g(x) = 42$.

116. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций $f(x) = 5^{x-1} + 5 \cdot 0,2^{2-x}$ и $g(x) = 30$.

117. Разделите «уголком» многочлен $P(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 2$ на многочлен $Q(x) = x + 1$, определите частное и остаток.

118. Разделите «уголком» многочлен $P(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 2$ на многочлен $Q(x) = x + 1$, определите частное и остаток.

119. Основание прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — ромб. Найдите площадь боковой поверхности призмы, учитывая, что $AC_1 = 8$ см, $DB_1 = 5$ см, а $BB_1 = 2$ см.

120. Основание прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — ромб. Найдите площадь боковой поверхности призмы, учитывая, что $AC_1 = 10$ см, $DB_1 = 12$ см, а $BB_1 = 8$ см.

121. Найдите область определения функции $f(x) = \sqrt{\frac{32 - 2^x}{x^2 - 8x + 16}}$.

122. Диагональ BE_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ образует с плоскостью основания угол 60° . Найдите объем описанного около призмы цилиндра, если $BE_1 = 8$ см.

123. Диагональ CF_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ образует с плоскостью основания угол 30° . Найдите объем описанного около призмы цилиндра, если $CF_1 = 12$ см.

124. В четырехугольной пирамиде $SABCD$ все ребра равны 6 см. Найдите объем пирамиды.

125. В четырехугольной пирамиде $SABCD$ все ребра равны 4 см. Найдите объем пирамиды.